Les fonctions exponentielles
Exercices

Les propriétés de la fonction exponentielle

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^4$
- $B = \dfrac{\mathrm{e}^{-5}}{\mathrm{e}^2}$
- $C = \dfrac{\mathrm{e}^{5x+7} \times \mathrm{e}^{-x-3}}{\mathrm{e}^{2x+3}}$
- $D = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}}$
- $E = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-4}$
- $F = \dfrac{(e^{-5})^2}{e^2 \times e^{-6}}$
- $G = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$
- $H = \left(e^{3x+2}\right)^2$
- $I = e^{2x+1} \times e^{-3x+5}$
- $J = \dfrac{e^{-x+1}}{e^{3x-4}}$
- $K = \dfrac{e^{x-7}}{e^{2x}} \times \dfrac{e^{3x+5}}{e^{-2x+1}}$

Corrigé

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^4 = \mathrm{e}^{3+4} = \mathrm{e}^7$
- $B = \dfrac{\mathrm{e}^{-5}}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{-5-2} = \mathrm{e}^{-7}$
- $C = \dfrac{\mathrm{e}^{5x+7} \times \mathrm{e}^{-x-3}}{\mathrm{e}^{2x+3}} = \dfrac{\mathrm{e}^{5x+7+(-x-3)}}{\mathrm{e}^{2x+3}} = \dfrac{\mathrm{e}^{4x+4}}{\mathrm{e}^{2x+3}} = \mathrm{e}^{4x+4-(2x+3)} = \mathrm{e}^{2x+1}$
- $D = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^{0-(-1)} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$
- $E = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-4} = \mathrm{e}^{2+(-4)} = \mathrm{e}^{-2}$
- $F = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x+(-x)} = \mathrm{e}^0 = 1$
- $G = \dfrac{(\mathrm{e}^{-5})^2}{\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-6}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2\times(-5)}}{\mathrm{e}^{2+(-6)}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-10}}{\mathrm{e}^{-4}} = \mathrm{e}^{-10-(-4)} = \mathrm{e}^{-6}$
- $H = \left(\mathrm{e}^{3x+2}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\times(3x+2)} = \mathrm{e}^{6x+4}$
- $I = e^{2x+1} \times e^{-3x+5} = e^{2x+1+(-3x+5)} = e^{-x+6}$
- $J = \dfrac{e^{-x+1}}{e^{3x-4}} = e^{-x+1-(3x-4)} = e^{-4x+5}$
- $K = \dfrac{e^{x-7}}{e^{2x}} \times \dfrac{e^{3x+5}}{e^{-2x+1}} = \dfrac{e^{x-7+3x+5}}{e^{2x-2x+1}} = \dfrac{e^{4x-2}}{e^1} = e^{4x-2-1} = e^{4x-3}$

Exercice 2

1) Montrer que pour tout réel x, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{x+1}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$

2) Montrer que pour tout réel x, on a : $1-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$

3) Justifier que pour tout réel x on a $\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

Corrigé

1) On a $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{x+1}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{1}}{\mathrm{e}^{1}+\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{1}}=\dfrac{e^{1}\times e^{x}}{e^{1}(1+\mathrm{e}^{x})}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$ après simplification par e^{1}

2) On transforme le membre de gauche :
$1-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$

3) **Méthode 1 :** On peut transformer le membre gauche de l'égalité :
$\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{(1-e^{-x})\times e^{x}}{(1+e^{-x})\times e^{x}}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}\times e^{x}}{e^{x}+e^{-x}\times e^{x}}=\dfrac{e^{x}-e^{-x+x}}{e^{x}+e^{-x+x}}=\dfrac{e^{x}-e^{0}}{e^{x}+e^{0}}=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ CQFD

Méthode 2 : On peut calculer la différence des deux membres de l'égalité :

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}&=\frac{(1-e^{-x})(e^{x}+1)}{(1+e^{-x})(e^{x}+1)}-\frac{(e^{x}-1)(1+e^{-x})}{(e^{x}+1)(1+e^{-x})}\\&=\frac{[e^{x}+1-e^{-x}\times e^{x}-e^{-x}]-[e^{x}+e^{x}\times e^{-x}-1-e^{-x}]}{(e^{x}+1)(1+e^{-x})}\\&=\frac{e^{x}+1-1-e^{-x}-e^{x}-1+1+e^{-x}}{(e^{x}+1)(1+e^{-x})}\\&=0\end{aligned}$$

On a donc bien $\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$

Méthode 3 : On utilise l'égalité des produits en croix :
$\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\Leftrightarrow(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x}+1)=(1+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x}-1)$
Il n'y a pas de valeur interdite, c'est pour cela qu'il y a bien l'équivalence

$(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x}+1)=\mathrm{e}^{x}+1-\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{x}+1-\mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+1-1=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$

$(1+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x}-1)=\mathrm{e}^{x}-1+\mathrm{e}^{-x}\times e^{x}-\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{x}-1+\mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ donc, l'égalité est bien vérifiée.

Exercice 3

Développer et simplifier les expressions suivantes :

- $A = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 5)$
- $B = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - 2)$
- $C = \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$
- $D = (\mathrm{e}^x + 2)(\mathrm{e}^x + 5)$
- $E = (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^{-x} + 3)$
- $F = (\mathrm{e}^x + 1)(2 - \mathrm{e}^{-x})$
- $G = (\mathrm{e}^x - 2)^2$
- $H = (\mathrm{e}^x + 1)^2$
- $I = (\mathrm{e}^x - 3)(\mathrm{e}^x + 3)$

Corrigé

- $A = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 5) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x + 5\mathrm{e}^x$
  $= \mathrm{e}^{2x} + 5\mathrm{e}^x$
- $B = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - 2) = \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \times (-2)$
  $= \mathrm{e}^{-x+x} - 2\mathrm{e}^{-x}$
  $= \mathrm{e}^0 - 2\mathrm{e}^{-x} = 1 - 2\mathrm{e}^{-x}$
- $C = \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} \times (-\mathrm{e}^{-x})$
  $= \mathrm{e}^{2x+x} - \mathrm{e}^{2x-x} = \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^x$
- $D = (\mathrm{e}^x + 2)(\mathrm{e}^x + 5) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \times 5 + 2 \times \mathrm{e}^x + 2 \times 5$
  $= \mathrm{e}^{2x} + 5\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + 10 = \mathrm{e}^{2x} + 7\mathrm{e}^x + 10$
- $E = (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^{-x} + 3) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x \times 3 + (-1) \times \mathrm{e}^{-x} + (-1) \times 3$
  $= \mathrm{e}^0 + 3\mathrm{e}^x - 1\mathrm{e}^x - 3$
  $= 2\mathrm{e}^x - 2$
- $F = (\mathrm{e}^x + 1)(2 - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^x \times 2 + \mathrm{e}^x \times (-\mathrm{e}^{-x}) + 1 \times 2 + 1 \times (-\mathrm{e}^{-x})$
  $= 2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0 + 2 - \mathrm{e}^{-x}$
  $= 2\mathrm{e}^x + 1 - \mathrm{e}^{-x}$
- $G = (\mathrm{e}^x - 2)^2 = (\mathrm{e}^x)^2 - 2 \times \mathrm{e}^x \times 2 + 2^2$
  $= \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 4$
- $H = (\mathrm{e}^x + 1)^2 = (\mathrm{e}^x)^2 + 2 \times \mathrm{e}^x \times 1 + 1^2$
  $= \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 1$
- $I = (\mathrm{e}^x - 3)(\mathrm{e}^x + 3) = (\mathrm{e}^x)^2 - 3^2$
  $= \mathrm{e}^{2x} - 9$

Exercice 4

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}+1}$

Démontrer que $f(x)+f(-x)=2$

Corrigé

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}+1}$

$$\begin{aligned}
f(x)+f(-x) &= \frac{2}{\mathrm{e}^{x}+1}+\frac{2}{\mathrm{e}^{-x}+1}\\
&= \frac{2\times(\mathrm{e}^{-x}+1)}{(\mathrm{e}^{x}+1)\times(\mathrm{e}^{-x}+1)}+\frac{2\times(\mathrm{e}^{x}+1)}{(\mathrm{e}^{-x}+1)\times(\mathrm{e}^{x}+1)}\\
&= \frac{2\times(\mathrm{e}^{-x}+1)+2\times(\mathrm{e}^{x}+1)}{(\mathrm{e}^{x}+1)(\mathrm{e}^{-x}+1)}\\
&= \frac{2\mathrm{e}^{-x}+2+2\mathrm{e}^{x}+2}{(\mathrm{e}^{x}+1)(\mathrm{e}^{-x}+1)}\\
&= \frac{2\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{x}+4}{\mathrm{e}^{0}+\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+1}\\
&= \frac{2\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{x}+4}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+2}\\
&= \frac{2(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}+2)}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+2}\\
&= 2
\end{aligned}$$

Equations et inéquations avec des exponentielles

Exercice 5

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $e^x = 1$ *b*) $e^x = 0$ *c*) $e^x + 1 = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $e^{4x} = e^{5x-1}$ *b*) $e^{4x^2} = e^{36}$ *c*) $e^{2x-3} = 1$ *d*) $e^{5x} = \dfrac{e^{-x}}{e}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $(3x-5)(e^x+2) = 0$ *b*) $4e^{-x} + 7xe^{-x} = 0$

4) *a*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 + 6X - 7 = 0$

   b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$ *b*) $e^{2x} + 4e^x + 3 = 0$

Corrigé

1) *a*) $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$ $S = \{0\}$

   b) $e^x = 0$ Impossible car on a vu que l'exponentielle était strictement positive sur $\mathbb{R}$

   c) $e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$

   Impossible car on a vu que l'exponentielle était strictement positive sur $\mathbb{R}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $e^{4x} = e^{5x-1} \Leftrightarrow 4x = 5x - 1 \Leftrightarrow x = 1$ $S = \{1\}$

   b) $e^{4x^2} = e^{36} \Leftrightarrow 4x^2 = 36 \Leftrightarrow 4x^2 - 36 = 0$

   $\Leftrightarrow (2x-6)(2x+6) = 0$

   $\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$ $S = \{-3\,;\,3\}$

   c) $e^{2x-3} = 1 \Leftrightarrow e^{2x-3} = e^0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ $S = \{\dfrac{3}{2}\}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $(3x-5)(e^x+2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5 = 0$ ou $e^x + 2 = 0$

   $\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$ ou $e^x = -2$

   $\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$ seulement puisque $e^x > 0$ $S = \{\dfrac{5}{3}\}$

   b) $4e^{-x} + 7xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(4 + 7x) = 0$

   $\Leftrightarrow e^{-x} = 0$ ou $4 + 7x = 0$

   $\Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{7}$ seulement puisque $e^{-x} \neq 0$ $S = \{-\dfrac{4}{7}\}$

4) *a*) $X^2 + 6X - 7 = 0$ pour $X_1 = 1$ ou $X_2 = -7$

   b) En posant $e^x = X$, l'équation $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$ devient : $X^2 + 6X - 7 = 0$.

   Par a), on en déduit que $e^x = 1 = e^0$ ou $e^x = -7$.

   Ce qui donne seulement $x = 0$ puisque $e^x > 0$. $S = \{0\}$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $X^2 + 3X - 4 = 0$ donne $X_1 = 1$ et $X_2 = -4$

   On en déduit que $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$ pour $x = 0$. $S = \{0\}$

b) $X^2 + 4X + 3 = 0$ donne $X_1 = -1$ et $X_2 = -3$

On en déduit que $e^{2x} + 4e^x + 3 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car l'exponentielle est strictement positive.

Exercice 6

1) *a)* Démontrer que pour tout réel x, $-2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1=(2\mathrm{e}^{x}+1)(1-\mathrm{e}^{x})$

b) Compléter le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$	$\cdot\cdot$	$+\infty$
Signe de $2\mathrm{e}^{x}+1$			
Signe de $1-\mathrm{e}^{x}$			
Signe de $-2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1$			

2) Étudier le signe de l'expression $(2x+6)\mathrm{e}^{x^2+6x+2}$.
On complètera le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	$\cdot\cdot$	$+\infty$
Signe de $2x+6$			
Signe de e^{x^2+6x+2}			
Signe de $(2x+6)\mathrm{e}^{x^2+6x+2}$			

Corrigé

1) *a)* On a : $(2\mathrm{e}^{x}+1)(1-\mathrm{e}^{x})=2\mathrm{e}^{x}-2\mathrm{e}^{2x}+1-\mathrm{e}^{x}=-2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1=$

b) On a $2\mathrm{e}^{x}+1=0 \iff \mathrm{e}^{x}=-1/2$ ce qui est impossible
On a $1-\mathrm{e}^{x}=0 \iff \mathrm{e}^{x}=1 \iff x=0$
On en déduit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $2\mathrm{e}^{x}+1$		$+$		$+$	
Signe de $1-\mathrm{e}^{x}$		$+$	0	$-$	
Signe de $-2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1$		$-$	0	$+$	

2) On a $2x+6=0 \iff x=-3$ et $m=2>0$
$\mathrm{e}^{x^2+6x+2}>0$ puisqu'une exponentielle est strictement positive.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $2x+6$		$-$	0	$+$	
Signe de e^{x^2+6x+2}		$+$		$+$	
Signe de $(2x+6)\mathrm{e}^{x^2+6x+2}$		$-$	0	$+$	

Calculer une dérivée (gratuitement.... pour le plaisir !)

Exercice 7

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2\mathrm{e}^x$
- $g(x) = 2x + \mathrm{e}^x$
- $h(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$
- $i(x) = (x^2 + 3\,x + 5)\,\mathrm{e}^x$.
- $j(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.
- $k(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{\mathrm{e}^x}$.
- $l(x) = 10\mathrm{e}^{-0,5x+1}$.
- $m(x) = (2x - 3)\mathrm{e}^{-0,1x}$.
- $n(x) = \mathrm{e}^{-x^2+x}$.

Corrigé

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- f est de la forme ku, avec k constante, donc $\boxed{f'(x) = 2\mathrm{e}^x}$
- On a simplement une addition de fonctions simples et dérivables, donc $\boxed{g'(x) = 2 + \mathrm{e}^x}$
- h est de la forme e^U, avec $U = 2x + 1$ et $U' = 2$, donc $\boxed{h'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x+1}}$
- $i(x) = (x^2 + 3\,x + 5)\,\mathrm{e}^x$ de la forme UV avec $U = x^2 + 3x + 5$ et $V = e^x$ et donc $U' = 2x + 3$ et $V' = e^x$

  $i'(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 5)e^x$ donc $\boxed{i'(x) = e^x(x^2 + 5x + 8)}$

- $j(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ de la forme $\dfrac{U}{V}$ avec $U = 4\mathrm{e}^x$ et $V = \mathrm{e}^x + 1$ et donc $U' = 4\mathrm{e}^x$ et $V' = \mathrm{e}^x$

  $$j'(x) = \frac{(4\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x + 1) - (4\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$$

  $$j'(x) = \frac{4\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$$ donc $\boxed{j'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}}$

- $k(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{\mathrm{e}^x}$ de la forme $\dfrac{U}{V}$ avec $U = x^2 + x + 1$ et $V = \mathrm{e}^x$ et donc $U' = 2x + 1$ et $V' = \mathrm{e}^x$

  $$k'(x) = \frac{(2x + 1)\mathrm{e}^x - (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}$$

  $$= \frac{\mathrm{e}^x((2x + 1) - (x^2 + x + 1))}{\mathrm{e}^{2x}}$$ donc $\boxed{k'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(-x^2 + x)}{\mathrm{e}^{2x}}}$

- $l(x) = 10\mathrm{e}^{-0,5x+1}$ de la forme e^U avec $U = -0,5x + 1$ et $U' = -0,5$

  $l'(x) = -0,5\mathrm{e}^{-0,5x+1}$ donc $\boxed{l'(x) = -0,5\mathrm{e}^{-0,5x+1}}$

- $m(x) = (2x - 3)\mathrm{e}^{-0,1x}$ de la forme UV avec $U = 2x - 3$ et $V = \mathrm{e}^{-0,1x}$ et donc $U' = 2$ et $V' = -0,1\mathrm{e}^{-0,1x}$

  $m'(x) = 2\mathrm{e}^{-0,1x} + (2x - 3)(-0,1\mathrm{e}^{-0,1x}) = \mathrm{e}^{-0,1x}(2 - 0,2x + 0.3)$ donc $\boxed{m'(x) = \mathrm{e}^{-0,1x}(2,3 - 0,2x)}$

- $n(x) = \mathrm{e}^{-x^2+x}$ de la forme e^U avec $U = -x^2 + x$ et $U' = -2x + 1$

  $n'(x) = (-2x + 1)\mathrm{e}^{-x^2+x}$ donc $\boxed{n'(x) = -(-2x + 1)\mathrm{e}^{-x^2+x}}$

Étudier une fonction

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse :

1) Le point $A(0\,;\,1)$ appartient la courbe $\mathscr{C}$.
2) Pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^x$
3) La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1{,}5$ est horizontale.
4) La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$
5) La fonction est positive sur $\mathbb{R}$

Corrigé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse :

1) $f(0) = (2\times 0+1)\mathrm{e}^0 = 1$ donc $A(0\,;\,1)$ appartient bien à la courbe $\mathscr{C}$. Affirmation VRAIE

2) f est de la forme UV avec $U = 2x+1$ et $V = \mathrm{e}^x$ $U' = 2$ et $V' = \mathrm{e}^x$
On a donc $f'(x) = U'V + UV' = 2\mathrm{e}^x + (2x+1)\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^x$ Affirmation FAUSSE

3) Une droite (et donc une tangente) est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1{,}5$ a pour coefficient directeur $f'(-1{,}5)$.
Or $f'(x) = 2xe^x + 3e^x$ donc $f'(1{,}5) = 2\times(-1{,}5)\mathrm{e}^{-1{,}5} + 3e^{-1{,}5} = 0$ Affirmation VRAIE

4) Étudions le signe de $f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^x$
- Il nous faut la dérivée sous sa forme factorisée : $f'(x) = \mathrm{e}^x(2x+3)$
- Signe de la dérivée :

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
Signe de e^x		$+$		$+$	
Signe de $2x+3$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

- Variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	$f(-1.5)$	$\nearrow$	

Affirmation FAUSSE

5) Il suffit de regarder le tableau de variations et de voir que $f(-1{,}5) < 0$ Affirmation FAUSSE

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - 8x)\,\mathrm{e}^{-2x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0.
3) Pour quelle valeur de x, $\mathscr{C}$ admet-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

Corrigé

1) f est du type UV avec $U = 3 - 8x$ et $V = \mathrm{e}^{-2x}$, $U' = -8$ et $V' = -2\mathrm{e}^{-2x}$
On a alors : $f'(x) = -8\mathrm{e}^{-2x} + (3 - 8x) \times (-2\mathrm{e}^{-2x}) = (-8 + 3 - 8x)\mathrm{e}^{-2x} = (-5 - 8x)\mathrm{e}^{-2x}$.
On sait qu'une exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
$-5 - 8x = 0 \iff x = \dfrac{-5}{8}$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-5/8$		$+\infty$
Signe de e^{-2x}		$+$		$+$	
Signe de $-5 - 8x$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$f(-0.625)$	$\searrow$	

2) La tangente à $\mathscr{C}$ en 0 a pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
On a $f'(0) = -5$ et $f(0) = 3$, on en déduit que $y = -5x + 3$

3) La courbe admet une tangente horizontale si et seulement si $f'(x) = 0$.
D'après le tableau de variations, on en déduit qu'il y a une tangente horizontale au point d'abscisse $-\dfrac{5}{8}$

Exercice 10

La fonction f qui à l'altitude x en kilomètres, associe la pression atmosphérique en hectopascals est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 1\,013{,}25\mathrm{e}^{-0{,}12x}$$

1) Calculer $f'(x)$ et déterminer le sens de variations de f.
2) En 1648, Blaise Pascal et Florin Périer mesurent la hauteur de mercure dans deux baromètres, l'un situé à Clermont-Ferrand et l'autre en haut de la montagne la plus proche, le Puy-de-Dôme.
Dans quel baromètre la hauteur de mercure était-elle la plus petite ?

Corrigé

1) f est du type e^{U}, avec $U = -0{,}12x$ et $U' = -0{,}12$, on a alors :
$f'(x) = 1\,013{,}25 \times (-0{,}12)\mathrm{e}^{-0{,}12x} = -121{,}59\mathrm{e}^{-0{,}12x}$.
Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $-121{,}59$, c'est à dire qu'elle est toujours strictement négative.
On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	
Variations de f	1 013.25 $\searrow$	

2) Clermont-Ferrand est à une altitude inférieure que le Puy-de-Dôme, la fonction étant strictement décroissante, a hauteur de mercure était la plus petite au Puy de Dôme.
En 1648, Blaise Pascal et Florin Périer mesurent la hauteur de mercure dans deux baromètres, l'un situé à et l'autre en haut de la montagne la plus proche, le .
Dans quel baromètre la hauteur de mercure était-elle la plus petite ?

Exercice 11

Un parachutiste de 80 kg est lâché avec une vitesse initiale nulle à 5 000 mètres d'altitude.
On considère la fonction v qui, à tout instant t positif (en s), associe la vitesse (en m.s^{-1}) du parachutiste à cet instant.
On suppose que tant que le parachute n'est pas ouvert, $v(t) = 44\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right)$

1) Étudier le signe de $44 - v(t)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2) En déduire une vitesse en m.s^{-1}, puis en km.h^{-1}, que ne peut pas dépasser ce parachutiste pendant sa chute, même s'il n'ouvre pas son parachute.

Corrigé

1) On a $44 - v(t) = 44 - 44\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right) = 44 - 44 + 44\mathrm{e}^{-0,2t} = 44\mathrm{e}^{-0,2t}$
Une exponentielle étant toujours strictement positive, on en déduit que $44 - v(t) > 0$.
2) De 1), on en déduit que $v(t) < 44$, donc, la vitesse du parachutiste ne peut pas dépasser 44 m.s^{-1}, soit : 158,4 km.h^{-1}.

Exercice 12

Une brioche qui était dans une étuve à 30 °C est placée dans un four chauffé à 180 °C pendant 35 minutes. La température au cœur de la brioche, exprimée en degrés Celsius, est donnée sur l'intervalle $[0\,;\,35]$ par une fonction du temps t, exprimé en minutes, de la forme $f(t) = a\mathrm{e}^{-0{,}022t} + 180$

1) Sachant que $f(0) = 30$, déterminer la valeur de a.
2) *a)* Justifier que $f'(t) = 3{,}3\mathrm{e}^{-0{,}022t}$ pour tout $t \in [0\,;\,35]$
   b) En déduire les variations de f sur $[0\,;\,35]$.
   c) Interpréter ce tableau de variations dans le contexte de l'exercice.
3) A l'aide d'une calculatrice, déterminer le temps nécessaire, en minutes, pour que la température au cœur de la brioche soit supérieure à 100 °C.

Corrigé

1) On a : $f(0) = 30$ et $f(0) = a\mathrm{e}^{-0{,}022\times 0} + 180 = a + 180$.
   Donc, $a + 180 = 30$, ce qui donne : $\boxed{a = -150}$.
2) *a)* f est du type e^{U}, avec $U = -0{,}022t$ et $U' = -0{,}022$.
   On en déduit que $f'(t) = -0{,}022 \times (-150\mathrm{e}^{-0{,}022t} + 0 = 3{,}3\mathrm{e}^{-0{,}022t}$
   b) Une exponentielle est strictement positive et 3,3 également, donc, on a $f'(t) > 0$ sur $[0\,;\,35]$.
   On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0	35
Signe de $f'(t)$	+	
Variations de f	30 ↗	≈ 110.55

   c) Plus le temps passe, plus la température au cœur de la brioche augmente...
3) A l'aide d'une calculatrice, avec un tableau, on peut voir que pour que la température au cœur de la brioche soit supérieure à 100 °C, il faut attendre la 29$^{\text{ème}}$ minute.

Exercice 13

On s'intéresse à la croissance d'une ville depuis le 1er janvier 2019.
On modélise l'évolution de sa population par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1+2\mathrm{e}^{-0,05x}}$$

, où $f(x)$ est le nombre d'habitants, en centaines de milliers, au 1er janvier 2019+x.

1) Quel est le nombre d'habitants en 2019 ?
2) *a)* Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$.

   b) Déterminer le sens de variation de f.
3) Á l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure à 200 000 habitants.

La fonction f est un exemple de fonction logistique. Ces fonctions ont été mises en évidence par le mathématicien belge Pierre-François Verhulst (1804-1849)

Corrigé

1) En 2019, on a $x = 0$, donc, $f(0) = \dfrac{3}{1+2\mathrm{e}^{-0,05\times 0}} = \dfrac{3}{3} = 1$.
   Donc, il y a cent mille habitants en 2019.
2) *a)* f est du type $\dfrac{k}{V}$, avec $V = 1+2\mathrm{e}^{-0,05x}$
   V est du type e^{U}, avec $U = -0,05x$ et $U' = -0,05$,
   on en déduit que $V' = 2\times(-0,05)\mathrm{e}^{-0,05x} = -0,1\mathrm{e}^{-0,05x}$.
   On a alors $f'(x) = -\dfrac{3\times(-0,1)\mathrm{e}^{-0,05x}}{(1+2\mathrm{e}^{-0,05x})^2} = \dfrac{0,3\mathrm{e}^{-0,05x}}{(1+2\mathrm{e}^{-0,05x})^2}$ pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$.

   b) Il n'y a que des termes strictement positifs dans cette expression : l'exponentielle, 0,3 et un carré...
   On en déduit alors :

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variations de f	1 ↗	

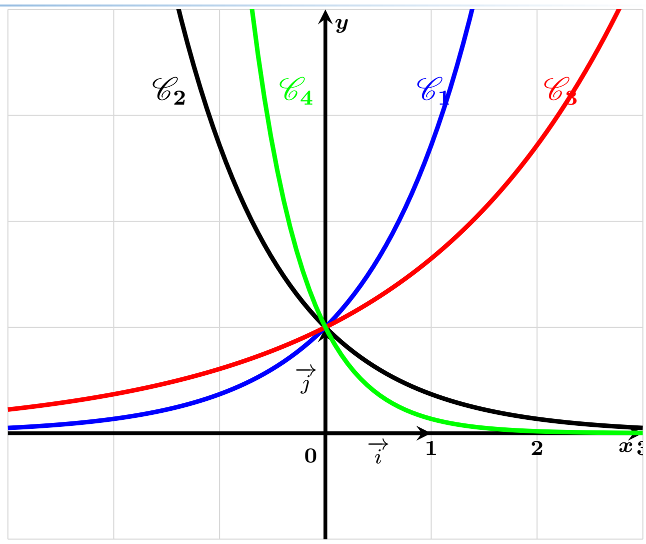
3) Á l'aide de la calculatrice, on a $f(x) \geqslant 2$ pour la première fois pour $x = 28$.
   Donc, la population de la ville sera supérieure à 200 000 habitants en 2019+28=2047.

Exercice 14

On a tracé les courbes de quatre fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}$. On sait que

- $f(x) = \mathrm{e}^{x}$
- $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$
- $h(x) = \mathrm{e}^{0.5x}$
- et $i(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

Associer à chaque fonction la courbe qui lui correspond en justifiant :



Corrigé

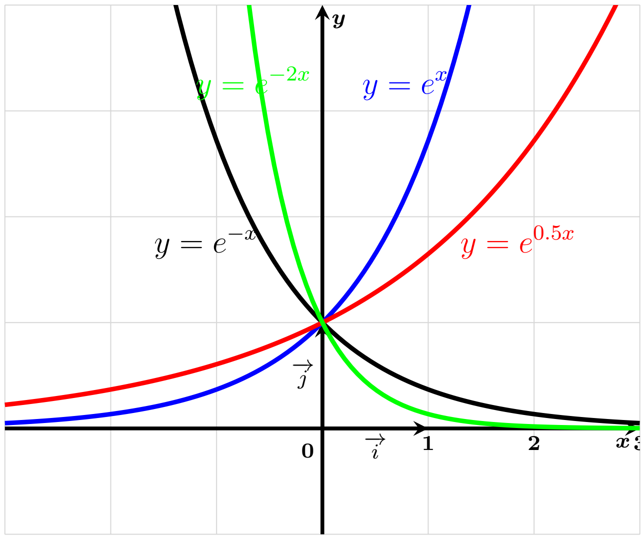
▷ **Ordonnée à l'origine :**

Remarquons tout d'abord que les quatre courbes passent par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$

En effet $f(0) = g(0) = h(0) = i(0) = e^0 = 1$

▷ **Variations :**

- $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ fonction croissante
- $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ fonction décroissante
- $h(x) = \mathrm{e}^{0.5x}$ fonction croissante
- et $i(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ fonction décroissante



▷ **Image de 1 :**

Pour différencier les fonctions f et h on peut par exemple calculer leur image en 1 :

$f(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx 2{,}72$ (courbe bleue) $\qquad h(1) = \mathrm{e}^{0.5} \approx 1.64$ (courbe rouge)

Pour différencier les fonctions g et i on peut aussi calculer leur image en 1 :

$g(1) = \mathrm{e}^{-1} = 0.37$ (courbe noire) $\qquad i(1) = \mathrm{e}^{-2} \approx 1.13$ (courbe verte)